Муниципальный методический Центр Управления образования г. Ижевска
Центр довузовского образования ФГБОУ ВПО УдГУ
Ижевский клуб интеллектуальных игр

Математическая олимпиада им. Е.Н. Анисимовой, 8 декабря 2013 г.
Заключительный тур. Решения.

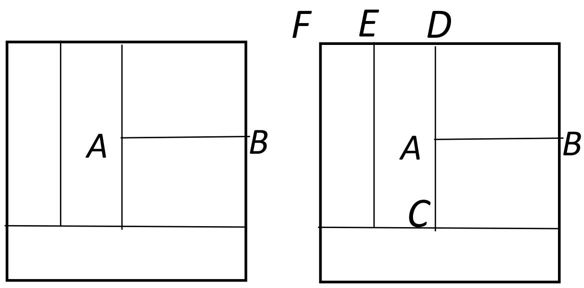
7 класс

Задача 1. Придумайте такое трехзначное число, состоящее из различных ненулевых цифр, такое, что если взять любую из его цифр и прибавить к ней 1, то получим делитель исходного числа.

Решение. Примеров достаточно много, например, 312 или 132 (оба делятся на 2, 3, 4).

Критерии. Если в примере есть хотя бы две одинаковые цифры – 0 баллов. Правильный пример без проверки – 6 баллов.

Задача 2. Квадрат разрезан на прямоугольники равной площади так, как показано на рисунке. Найдите площадь квадрата, если отрезок *AB* равен 1.



Ответ: 4. Решение. Обозначим площадь всего квадрата за S. Тогда площадь каждого из маленьких прямоугольников равна S/5. Это означает, что $AC = AD = S/5$. Тогда $DC = 2S/5$, и из площади вертикального прямоугольника получаем, что $ED=FE=1/2$. Но тогда сторона квадрата равна $1/2+1/2+1=2$, а площадь квадрата равна 4.

Критерии. Ответ без обоснований – 1 балл. Ответ и какие-то обозначения на чертеже, которые можно принять за обоснования – 2 балла. Недостаточные обоснования (например, без объяснений приведены верные вычисления) – 4 балла.

1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

Задача 3. Можно ли в каждую клетку квадрата 5×5 поставить 0 или 1 так, чтобы сумма в каждом квадратике 2×2 делилась на 3, при этом в таблице бы встречались и нули, и единицы?

Ответ: да, можно. Решение. См. пример

Критерии. Верная расстановка без обоснования, как она получается– 7 баллов.

Задача 4. Среднее арифметическое нескольких подряд идущих натуральных чисел больше, чем самое маленькое из них, в 5 раз. Во сколько раз среднее арифметическое меньше, чем наибольшее из этих чисел?

Ответ: в 1,8 раза. Решение. Обозначим наименьшее из этих чисел за n, наибольшее – за $n+d-1$ (то есть всего взято d чисел). Тогда среднее арифметическое всех этих чисел равно $(n+n+1+n+2+\ldots+n+d-1)/d = (nd+(1+2+\ldots+d-1))/d = n+d(d-1)/2d = n+(d-1)/2=5n$, откуда $d-1 = 8n$. Значит, наибольшее из чисел равно $n+8n = 9n$, то есть оно в 9 раз больше, чем наименьшее из чисел, а то, в свою очередь, меньше среднего арифметического в пять раз. Отсюда получаем ответ.

Решение. Разобьем числа на пары – первое с последним, второе с предпоследним и так далее. Легко видеть, что сумма в каждой паре одинакова. При этом, если чисел нечетное число, что среднее число остается без пары, а сумма в каждой паре равна удвоенному среднему, то есть каждую пару можно заменить на удвоенное среднее. Отсюда следует, что среднее арифметическое равно как раз среднему числу, то есть $5n$ (n – наименьшее число). Тогда наибольшее равно $5n + (5n-n) = 9n$, $9n/5n = 1{,}8$. Если же количество чисел четно (пусть оно равно $2x$), то в самой средней паре сумма нечетна, пусть она равна $2k+1$. Тогда среднее арифметическое всех чисел равно $(2k+1)x/2x = k+0{,}5$, то есть оно нецелое. В то же время оно в пять раз больше наименьшего, то есть целое. Значит, такого быть не может.

Критерии. Если не обосновано, почему среднее арифметическое всех чисел равно среднему арифметическому крайней пары, снимается 2 балла. Если в решении по второму типу без обоснований сказано, что четный случай невозможен – 4 балла. Если он вообще не рассмотрен – 3 балла. Ошибки в преобразованиях, не повлиявшие на ответ и результат – 4 балла. Правильный ответ без обоснований (полученный из одного или нескольких правильных примеров) – 1 балл.

Задача 5. В стране Думуляндии из каждого города выходило ровно 10 дорог, каждая дорога соединяла ровно два города. Из любого города можно было добраться до любого другого, возможно, через другие города – это было ПРЕКРАСНОЕ свойство. Но во время наводнения затопило два города – А и Б, соединенные дорогой, после чего для незатопленных городов ПРЕКРАСНОЕ свойство уже не выполнялось (так как через затопленные города ездить нельзя). Докажите, что до наводнения было достаточно закрыть 9 дорог, чтобы ПРЕКРАСНОЕ свойство нарушилось.

Решение. В сумме из А и Б выходит 20 дорог, но одна дорога – общая, поэтому из А и Б в сумме выходит 18 дорог в другие города (назовем эти дороги затопленными). Так как после наводнения все города распались минимум на две части, проехать из одной в другую можно только через затопленные города, то в одну из частей ведет не более 9 затопленных дорог. Вот их и надо закрыть, чтобы нарушить ПРЕКРАСНОЕ свойство.

Критерии. Если вместо нескольких компонент связности рассматривается РОВНО две – 6 баллов. Ошибки в вычислениях степеней, не повлиявшие на ход решения – 5 баллов. Рассмотрение вместо компонента связности всех городов, из которых дороги ведут в А или Б (хотя из решения видно, что имеется в виду именно компонента связности) – 5 баллов.

Муниципальный методический Центр Управления образования г. Ижевска
Центр довузовского образования ФГБОУ ВПО УдГУ
Ижевский клуб интеллектуальных игр

Математическая олимпиада им. Е.Н. Анисимовой, 8 декабря 2013 г.
Заключительный тур. Решения.

8 класс

Задача 1. Придумайте такое четырехзначное число, состоящее из различных ненулевых цифр, такое, что если взять любую из его цифр и прибавить к ней 1, то получится делитель исходного числа.

Решение. Например, 3612. Легко проверить, что это число делится на 2, 3, 4. При делении на 7 оно дает 516.

Критерии. Если в примере есть хотя бы две одинаковые цифры – 0 баллов. Правильный пример без проверки – 6 баллов.

Задача 2. Среднее арифметическое нескольких подряд идущих натуральных чисел больше, чем самое маленькое из них, в 5 раз. Во сколько раз среднее арифметическое меньше, чем наибольшее из этих чисел?

Ответ: в 1,8 раза. Решение. Обозначим наименьшее из этих чисел за n, наибольшее – за $n+d–1$ (то есть всего взято d чисел). Тогда среднее арифметическое всех этих чисел равно $(n+n+1+n+2+…+n+d–1)/d = (nd+(1+2+…+d–1))/d = n+d(d–1)/2d = n+(d–1)/2=5n$, откуда $d–1 = 8n$. Значит, наибольшее из чисел равно $n+8n = 9n$, то есть оно в 9 раз больше, чем наименьшее из чисел, а то, в свою очередь, меньше среднего арифметического в пять раз. Отсюда получаем ответ.

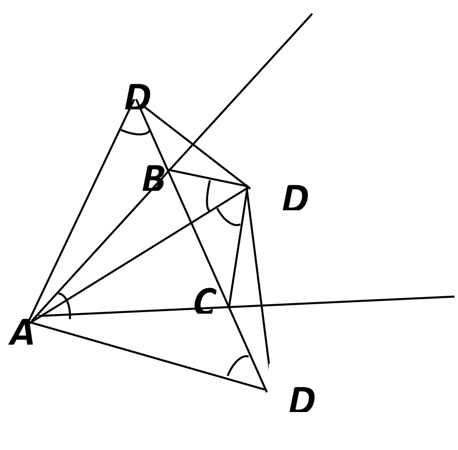
Критерии. Если не обосновано, почему среднее арифметическое всех чисел равно среднему арифметическому крайней пары, снимается 2 балла. Если в решении по второму типу без обоснований сказано, что четный случай невозможен – 4 балла. Если он вообще не рассмотрен – 3 балла. Ошибки в преобразованиях, не повлиявшие на ответ и результат – 4 балла. Правильный ответ без обоснований (полученный из одного или нескольких правильных примеров) – 1 балл.

Задача 3. В произведении $a^b b^c c^d d^e e^f f^g g^k k^l l^m m^a$ Вася заменил каждую букву на натуральное число от 1 до 10 (разные буквы – на разные числа, одинаковые – на одинаковые). На какую наибольшую степень двойки может делиться произведение?

Ответ: 2^{69}. Решение. Понятно, что в наибольшей возможной степени должна стоять $8=2^3$. Это 10. В степени 9 должна стоять только $4= 2^2$, остальные четные числа должны стоять в степенях 8, 7 и 6. Тогда произведение будет делиться на степень двойки, равную $3·10+2·9+8+7+6 = 30+18+21=69$. В то же время такой вариант вполне возможен, пример $2^8·8^{10}·10^6·6^7·7^4·4^9·9^1·1^3·3^5·5^2$.

Критерии. Верный ответ без обоснования – 1 балл. Если при верном обосновании и примере ошибка в суммировании степеней – 6 баллов. Верное обоснование, но в примере не один цикл, а два – 3 балла.

Задача 4. Внутри угла $\angle BAC=45°$ взята точка D так, что $\angle ADB = \angle ADC = 45°$.Из точки D опустили перпендикуляр на прямую AB и продлили его на свою длину, получили точку D_1. Из точки D опустили перпендикуляр на прямую AC и продлили его на свою длину, получили точку D_2. Докажите, что точки D_1, D_2, B и C лежат на одной прямой.



Решение. Так как прямая AB – серединный перпендикуляр к отрезку DD_1, то треугольник D_1AD – равнобедренный, то есть $D_1A = DA$, $\angle AD_1B = \angle ADB$, $\angle BAD_1 = \angle BAD$. Аналогично $D_2A = DA$, $\angle AD_2B = \angle ADB$, $\angle BAD_2 = \angle BAD$. Из этих равенств сразу следует, что $\angle D_1AD_2 = 2\angle BAC = 90°$. Кроме того, D_1A

$= D_2A$, поэтому треугольник D_1AD_2 – прямоугольный и равнобедренный, то есть $\angle AD_1D_2 = 45°$. Но так как $\angle AD_1B = \angle ADB = 45°$, то точка B лежит на прямой D_1D_2. Аналогично и для точки С.

Критерии. Подсчитаны все необходимые углы, решение не закончено – 1 балл. Если решение в целом верно, но плохо объяснено, почему точки лежат на одной прямой – 6 баллов.

Задача 5. В клубе собралось 2013 человек, часть из них знакома, а часть – нет (знакомство всегда обоюдно). Известно, что если взять любых двух людей А и Б, то либо оба они ни с кем из остальных людей незнакомы, либо каждый из них имеет хотя бы одного знакомого среди остальных (это могут быть разные люди). Чему может быть равно наименьшее возможно число пар знакомых среди посетителей клуба, если хотя бы одна пара знакомых все-таки есть?

Решение. Если есть человек, который никого не знает, то его можно рассмотреть с любым из других (назовем его X), и окажется, что X никого не знает. В силу произвольного выбора X получаем, что никто ни с кем не знаком, что противоречит условию. Значит, каждый посетитель знает хотя бы одного другого, то есть степень каждой вершины в графе знакомств не менее 1. Но все 2013 вершин не могут иметь степень 1, поэтому есть вершина степени хотя бы 2. Назовем этого человека D, а двух его знакомых – А и B. Рассмотрим A и D. Так как D знаком еще хотя бы с B, то и A с кем-то знаком, то есть еще одна вершина степени минимум 2. Но не может быть ровно двух вершин степени ровно 2 (тогда останется 2011 вершин степени 1), общая сумму степеней вершин минимум 2+2+2011+1=2016, а значит, ребер-знакомств минимум 1008. Пример строится так. Берем тройку людей и знакомим их по кругу, а оставшихся 2010 людей разбиваем на пары знакомых. Легко проверить, что пример подходит.

Критерии. Доказательство того факта, что не существует человека, не знакомого ни с кем - 1 балл. Далее рассмотрение пар и ссылка на четность – еще 1 балл. Если в дальнейшем в решении школьника построение примера идет вместе с оценкой (пары невозможны, значит, самое «лучшее» - подцепить еще одного школьника и т.д.) – 4 балла.