Городская математическая олимпиада им. Е.Н. Анисимовой

2 декабря 2018 г.

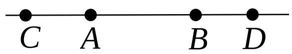
Решения 8 класса

Задача 1. В семье четверо детей – Маша, Женя, Саша и Катя, причем мальчики всегда врут, а девочки всегда говорят правду. Однажды друзья услышали от Саши фразу: «У меня ровно двое сестер». Сколько в семье мальчиков? (О. Нечаева)

Ответ. один. Решение. если Саша – девочка, то она говорит правду, и у неё двое сестер – Маша и Катя, а значит, Женя – мальчик. Если же Саша – мальчик, то у него не должно быть ровно двое сестер, а две уже точно есть – это Маша и Катя. Значит, Женя – девочка. В любом случае, в семье ровно один мальчик.

Задача 2. *Машина едет с постоянной скоростью в одном направлении по прямой дороге, возле которой стоят два дома. В полдень, когда машина еще не доехала до домов, сумма расстояний от нее до этих домов равнялась 10 км. Через 10 минут, когда машина уже миновала оба дома, оказалось, что сумма расстояний от нее до домов снова равна 10 км. Какова скорость машины?* (И. Рубанов)

Ответ. 60 км/ч. Решение. Пусть дома находятся в точках A и B, машина в полдень находилась в точке C, а через 10 минут — в точке D (см. рис.). По условию $CA+CB = DA+DB = 10$. Заметим, что $CA+CB = 2CA+AB$, а $DA+DB = 2DB+AB$, откуда $CA = DB$. Поэтому $CD = CA+AB+BD = 2CA+AB = 10$ км. Получается, что за 10 минут машина проехала 10 километров. Поэтому за 60 минут она проедет 60 км.

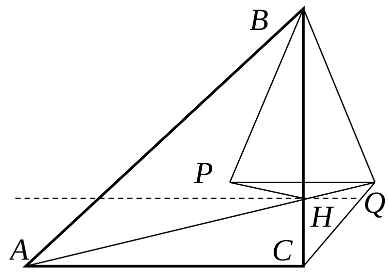


Задача 3. *При каком наибольшем натуральном k клетки таблицы 5×5 можно заполнить нулями и единицами (в каждой клетке должно стоять ровно одно число) так, чтобы нашлись k строк, в каждой из которых сумма чисел не меньше 3, и k столбцов, в каждом из которых сумма чисел не больше 2?* (О. Нечаева, И. Рубанов)

Ответ. При k = 4. Решение. При $k = 5$ таблицу искомым образом заполнить нельзя, так как при счете суммы чисел в таблице сложением сумм по строкам получается, что она не меньше $3\cdot 5 = 15$, а при счете той же суммы по столбцам получается, что она не больше $2\cdot 5 = 10$. Пример заполнения таблицы, удовлетворяющего условию задачи при $k = 4$, приведен на рисунке справа.

1	1	0	0	1
1	1	0	0	1
0	0	1	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	0	1

Задача 4. *Внутри треугольника ABC расположена точка P. На стороне BC выбрана точка H, не совпадающая с серединой стороны. Оказалось, что биссектриса угла AHP перпендикулярна стороне BC, $\angle ABC = \angle HCP$ и BP = AC. Докажите, что BH = AH.* (О. Нечаева по фольклорным мотивам)

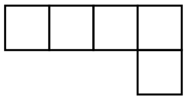


Решение. Отложим на продолжении отрезка AH за точку H отрезок $HQ = HP$. Поскольку биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны, прямая BC является биссектрисой угла PHQ, смежного с углом AHP и, значит, серединным перпендикуляром к PQ. Поэтому $\angle ABC = \angle HCP = \angle HCQ = \angle BCQ$, откуда получаем, что прямые AB и CQ параллельны. Заметим, что при этом прямые AC и BQ не параллельны, так как иначе точка H пересечения диагоналей параллелограмма $ABQC$ была бы, вопреки условию, серединой отрезка BC. Так как, кроме того, $AC = BP = BQ$, получается, что $ABQC$ — равнобедренная трапеция, и равенство $AH = BH$ — ее известное (и легко доказываемое) свойство.

Задача 5. *Найдите все натуральные числа n, для которых число $n^7+n^6+n^5+1$ имеет ровно три натуральных делителя.* (О. Нечаева, И. Рубанов)

Ответ. 1. Решение. При $n = 1$ $n^7+n^6+n^5+1 = 4$. У числа 4 ровно три делителя: 1, 2, 4. Заметим далее, что $n^7+n^6+n^5+1 = (n^7+n^5)+(n^6+1) = n^5(n^2+1)+(n^2+1)(n^4-n^2+1) = (n^2+1)(n^5+n^4-n^2+1) = (n^2+1)(n+1)(n^4-n+1)$. При $n > 1$ выполнены неравенства $n^2+1 > n+1 > 1$, и у числа $(n^2+1)(n+1)(n^4-n+1)$ есть по крайней мере четыре различных делителя: 1, $n+1$, n^2+1 и $(n^2+1)(n+1)$.

Задача 6. *Назовем* **сапогом** *клетчатую фигуру, составленную из прямоугольника шириной одну и длиной не менее двух клеток и клетки, примыкающей сбоку к одной из крайних клеток этого прямоугольника (на рисунке изображен пример сапога из 5 клеток). Можно ли какой-нибудь клетчатый квадрат разрезать по границам клеточек на сапоги, среди которых нет равных?* (И. Рубанов)



Ответ. Нельзя. Решение. Назовем *длиной сапога* количество клеток в его голенище (например, на чертеже из условия задачи сапог длины 4). Очевидно, что два сапога равны тогда и только тогда, когда равны их длины. Возьмем квадрат со стороной n. Допустим, его удалось разрезать на попарно различные сапоги. Длина любого из них не превосходит n, и среди них не больше одного сапога каждой из длин n, $n-1$, …, 2. Значит, их суммарная площадь не больше, чем $3+\ldots+n+(n+1) = (n+4)(n-1)/2 = (n^2+3n-4)/2$. Теперь достаточно показать, что полученный результат меньше площади квадрата: $(n^2+3n-4)/2 < n^2$, откуда $n^2-3n+4 > 0$ и $n > 3-4/n$. Последнее неравенство очевидным образом выполнено при $n \geq 3$, а при $n = 2$ проверяется непосредственно.

Городская математическая олимпиада им. Е.Н. Анисимовой

2 декабря 2018 г.

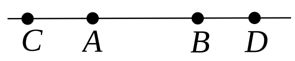
Решения 7 класса

Задача 1. В семье четверо детей – Маша, Женя, Саша и Катя, причем мальчики всегда врут, а девочки всегда говорят правду. Однажды друзья услышали от Саши фразу: «У меня ровно двое сестер». Сколько в семье мальчиков? (О. Нечаева)

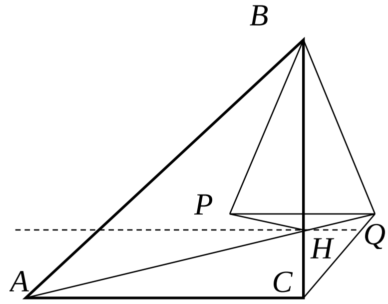
Ответ. один. Решение. Если Саша – девочка, то она говорит правду, и у неё двое сестер – Маша и Катя, а значит, Женя – мальчик. Если же Саша – мальчик, то у него не должно быть ровно двое сестер, а две уже точно есть – это Маша и Катя. Значит, Женя – девочка. В любом случае, в семье ровно один мальчик.

Задача 2. *Машина едет с постоянной скоростью в одном направлении по прямой дороге, возле которой стоят два дома. В полдень, когда машина еще не доехала до домов, сумма расстояний от нее до этих домов равнялась 10 км. Через 10 минут, когда машина уже миновала оба дома, оказалось, что сумма расстояний от нее до домов снова равна 10 км. Какова скорость машины?* (И. Рубанов)

Ответ. 60 км/ч. Решение. Пусть дома находятся в точках A и B, машина в полдень находилась в точке C, а через 10 минут — в точке D (см. рис.). По условию $CA+CB = DA+DB = 10$. Заметим, что $CA+CB = 2CA+AB$, а $DA+DB = 2DB+AB$, откуда $CA = DB$. Поэтому $CD = CA+AB+BD = 2CA+AB = 10$ км. Получается, что за 10 минут машина проехала 10 километров. Поэтому за 60 минут она проедет 60 км.



Задача 3. *Внутри треугольника ABC расположена точка P, а на стороне BC – точка H. Оказалось, что биссектриса $\angle AHP$ перпендикулярна стороне BC. Докажите, что если опустить перпендикуляр из точки P на сторону BC и продлить его на свою длину, то полученная точка будет лежать на прямой AH.* (О. Нечаева по фольклорным мотивам)



Решение. Отложим на продолжении отрезка AH за точку H отрезок $HQ = HP$. Поскольку биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны, прямая BC является биссектрисой угла PHQ, смежного с углом AHP. Следовательно, в равнобедренном треугольнике PQH биссектриса является медианой и высотой, поэтому Q – искомая точка.

Задача 4. В квадрате все клетки закрашены в синий или красный цвет, при этом все клетки, лежащие на внешней границе, закрашены синим. Назовем все пары клеток, окрашенных в различный цвет и имеющих общую сторону, яркими. Докажите, что количество ярких пар четно. (по мотивам математических боев турнира им. академика Ляшко)

Решение 1. Заметим, что любую яркую пару однозначно определяет общая сторона красной и синей клетки, поэтому нам надо доказать, что таких общих сторон четное число. Общее количество сторон у красных клеток делится на 4 (так как у каждой клетки 4 стороны), при это каждая сторона – общая либо с красной клеткой (и тогда мы посчитали её два раза), либо с синей. Следовательно, общих сторон с синими – четное число.

Решение 2. Пусть изначально весь квадрат синий, будем постепенно добавлять красные клетки. При перекрашивании одной красной клетки может добавиться 4 граничных с синим отрезка, может добавиться 3 и исчезть 1 (если новая красная клетка граничит одной своей стороной с красной), аналогично мы можем получить $+2–2 = 0$, $+1–3 = –3$ и $–4$. В любом случае четность количества таких сторон не меняется, а изначально их было 0.

Задача 5. Петя написал на доске несколько различных целых чисел. Оказалось, что если взять любые три из них, то среди них обязательно найдется пара чисел, в сумме дающая степень двойки. Какое наибольшее количество чисел могло быть записано на доске? (киевские районные олимпиады)

Ответ. шесть. Решение. Пример записанных чисел (–1, 3, 5, –2, 6, 10). Пусть у нас можно написать 7 чисел с таким свойством. Назовем пару чисел хорошей, если она дает степень 2, и нехорошей в обратном случае. Заметим, что среди них не больше двух отрицательных (иначе среди трех отрицательных нет хорошей пары). Возьмем наибольшее число, обозначим его n. Кроме того, пусть $0<a<b<c<d<n$ – тоже записанные числа. Заметим, что если x – наибольшее из чисел a, b, c, d, которое с n дает хорошую пару, т.е. $n+x = 2^k$, при этом $n > x$, то $n>2^{k-1}$, то для любого $y<x$ верно, что $n+y < n+x = 2^k$, поэтому ни с каким меньшим числом n не дает хорошую пару, то есть n составляет хорошую пару только с одним из чисел a, b, c, d. Но тогда есть три числа, с которым n составляет нехорошие пары, поэтому эти три числа попарно составляют хорошие пары. Без ограничения общности это $0<a<b<c$. Аналогичные рассуждения показывают, что если $b+c = 2^m$, то $c>2^{m-1}$, тогда $2^{m-1}< a+c < b+c< 2^m$, противоречие.