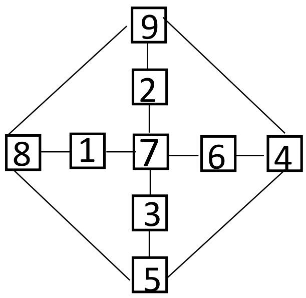
Математическая олимпиада им. Е.Н. Анисимовой, 26 апреля 2015 г.
Городской тур. 4 класс, РЕШЕНИЯ.

Задача 1. Расшифруйте ребус $\overline{АААА}+\overline{ББББ}+\overline{ГГГГ}=\overline{БАААГ}$(одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным – разные, $\overline{ДВ}$ означает число, записанное с помощью цифр Д и В именно в таком порядке). Найдите все варианты и докажите, что других нет.

Ответ: 9999+1111+8888 = 19998. Решение. Запишем сложение в столбик и заметим, что все разряды одинаковы, следовательно, дают одинаковый переход в следующий разряд. Кроме того, А+Б+Г на конце дают Г, то есть либо А+Б=10, либо А+Б=20, но этот вариант невозможен, так как А и Б – цифры. Следовательно, переходит из разряда в разряд ровно 1, поэтому Б = 1. Но тогда А = 9 (так как А+Б=10). Кроме того, в разряде десятков должно было получится Г, но так как перешла 1, получилось А, поэтому Г+1=А, Г=8. Отсюда получаем единственный вариант.

Задача 2. Пятеро юношей спорят, когда же пройдет концерт их любимой группы. Антон говорит, что концерт состоится 16 августа, в понедельник, Борис – что 17 августа, во вторник, Виталий – что 17 сентября, в четверг, Григорий – что 17 августа, в понедельник, и Дмитрий – что 16 сентября, во вторник. Оказалось, что один из них прав, а все остальные имеют хотя бы одну правильную информацию (месяц, число или день недели). Когда же состоится концерт? Ответ обоснуйте.

Ответ: Борис. Решение. Заметим, что Антон и Виталий отличаются во всех трех частях, поэтому никто из них не может быть прав. Аналогичная ситуация у Григория и Дмитрия, поэтому никто из них не может быть прав. Значит, прав Борис, легко проверить, что этот ответ подходит.



3. Расставьте в квадратики числа от 1 до 9, чтобы каждое встречалось ровно один раз и чтобы сумма пяти квадратиков по вертикали, сумма пяти квадратиков по горизонтали и сумма четырех квадратиков в вершинах «повернутого» квадрата были равны. Число 7 уже стоит на своем месте.

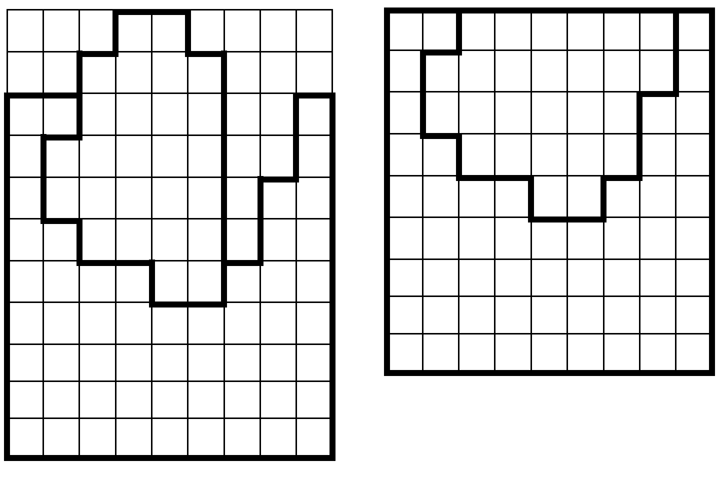
Ответ: см. рис. Решение. Могут быть и другие варианты. В любом случае, сумма должна быть равна 26.

4. На переправу пришла толпа мальчиков, вес каждого из которых был равен 40 кг, 50 кг или 60 кг, причем мальчиков каждого веса в этой компании было как минимум двое. Они собирались переправиться на другой берег, причем у них была с собой лодка. Какой минимальной грузоподъемности должна быть лодка, чтобы все мальчики сумели переправиться на другой берег?

Ответ: 80 кг. Решение. Грузоподъёмность лодки должна быть не меньше 80 кг, иначе на тот берег никогда не смогут переправиться двое, и некому будет перегонять лодку назад, чтобы забрать остальных. С помощью лодки грузоподъёмностью 80 кг можно переправить всех следующим образом. Двое 40-килограммовых плывут туда, потом один плывёт назад, потом переправляется любой из оставшихся, второй 40-килограммовый отгоняет лодку назад, потом двое 40-килограммовых снова переправляются и т.д., пока не переправятся все, кроме двух 40-килограммовых, Последним рейсом они переправляются — и вся копания на другом берегу!

5. Разрежьте фигуру на две части (не обязательно равные) так, чтобы, переложив их, можно было получить квадрат. Фигурки можно поворачивать и переворачивать. Покажите, как разрезать и как складывать.

Ответ: см. рис.



Математическая олимпиада им. Е.Н. Анисимовой, 26 апреля 2015 г.
Городской тур. 5 класс, РЕШЕНИЯ.

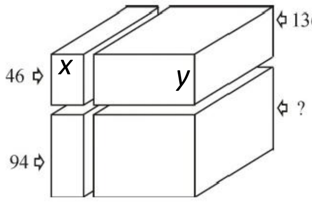
Задача 1. Антону надо через 5 минут быть в аэропорту, который находится в 5 км от его дома. Сразу после выезда он 2 минуты ехал со скоростью 90 км/ч. С какой наименьшей средней скоростью он может проехать оставшийся путь, чтобы не опоздать?

Ответ: 40 км/ч. Решение. 2 минуты – это 1/30 часа, значит, он проехал 90/30 = 3 км. Осталось ехать 5–3 = 2 км. Времени же осталось 3 минуты, то есть 1/20 часа. Следовательно, возможная скорость 2:1/20 = 40 км/ч.

Задача 2. Про натуральное число *n* известно, что НОД(1000, *n*) = 4 и НОД(1000, *n*+1) = 5. Чему равен НОД (1000, *n* + 2)?

Ответ: 2. Решение. Заметим, что число *n* делится на 4, поэтому число *n*+2 – четное, но на 4 не делится, т.е. двойка входит в него в первой степени. Кроме того, *n*+1 делится на 5, поэтому *n* на 5 не делится. Так как в разложении 1000 на простые множители есть только 2 и 5, то остальные множители в числе *n* не повлияют на НОД.

Задача 3. Борис распилил деревянный куб с длиной ребра равной 7 см на четыре прямоугольных части, сделав распилы параллельно сторонам куба (см. рисунок). Числа на рисунке показывают (в кв. см.) общую площадь поверхности трех частей. Чему равна общая площадь поверхности четвертой части?



Ответ: 214 см^2. Решение. Сложим площади поверхностей двух левых частей – верхней и нижней. 46+94 =140. Мы получили две полных грани по 7·7 = 49 и шесть прямоугольников, у каждого из них одна сторона 7, а другая – x (обозначим так левую часть верхнего ребра). (140–98):6 = 7, поэтому *x* = 1. Теперь сложим площади поверхности двух верхних частей, аналогично получим две грани по 49 и 6 прямоугольников 7×*y*. Аналогичные вычисления показывают, что (46+136–98):6 = 14, *y* = 2. Следовательно, оставшаяся часть представляет из себя «брусок» размерами 6×5×7, и её площадь поверхности составляет 2·(30+35+42) = 214

Задача 4. В Бразилии в ходу монеты в 1, 10, 25 и 50 сентаво. Густав имеет монеты всех видов, хотя бы по одной, но не может набрать 1 реал (равный 100 сентаво) без сдачи. Какую наибольшую сумму может иметь Густав? Ответ обоснуйте!

Ответ: 1 реал 19 сентаво или 119 сентаво. Решение. Заметим, что он не может иметь две монетки по 50. Значит, монетка в 50 ровно одна. Если он имеет две монетки в 25, то получаем, что 50+25+25=100, это невозможно, поэтому монетка в 25 тоже одна. Кроме того, не может быть 5 монеток в 10, поэтому монеток по 10 максимум 4 штуки. Теперь рассмотрим единички. Если у нас единичек 10 или больше, то каждые десять единичек заменим на 10, от этого ничего ситуация не улучшится. Значит, единичек не больше 9. Если у нас есть хотя бы 5 единичек, то наберем 50+25+5=80, но тогда десяток не больше одной. Итого в сумме мы можем иметь не больше чем 50+25+10+9=99 сентаво. Значит, у нас максимум 4 единички, и мы имеем 50+25+10+10+10+10+1+1+1+1 = 119.

Задача 5. В бесконечном турнире по волейболу участвует 30 команд. Каждый день каждая команда играет ровно один матч, ничьих в волейболе не бывает. Каждое утро главный судья составляет расписание матчей на текущий день, т.е. распределяет команды на пары. Докажите, что как бы судья не старался, команды могут играть так, чтобы никогда не появилась команда, проигравшая 5 матчей подряд.

Решение. Пусть команды каждый день договариваются играть так, чтобы команда с 5 поражениями подряд не появилась. Если такая появилась, назовем это часом X. Невозможно избежать часа X только тогда, когда судья сведет две команды, у которых уже есть по 4 поражения. Значит, этого надо избегать, но это невозможно только в той ситуации, когда за день до часа X есть 4 команды с тремя поражениями (тогда судья сводит их по парам, и в каждой паре появляется проигравшая команда, у неё становится 4 поражения). Это нельзя избежать, только если за два дня до часа X будет 8 команд с двумя поражениями, а за три дня до часа X – 16 команд с одним поражением. Но каждый день у нас максимум 15 поражений, поэтому часа X всегда можно избегать.

Математическая олимпиада им. Е.Н. Анисимовой, 26 апреля 2015 г.
Городской тур. 6 класс, РЕШЕНИЯ.

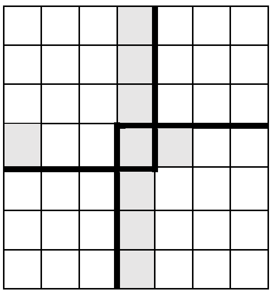
***Задача* 1**. Про натуральное число *n* известно, что НОД (1000, *n*) = 4 и НОД (1000, *n*+1) = 5. Чему равен НОД(1000, *n*+2)?

Ответ: 2. Решение. Заметим, что число *n* делится на 4, поэтому число *n*+2 – четное, но на 4 не делится, т.е. двойка входит в него в первой степени. Кроме того, *n*+1 делится на 5, поэтому *n* на 5 не делится. Так как в разложении 1000 на простые множители есть только 2 и 5, то остальные множители в числе *n* не повлияют на НОД.

***Задача* 2.** Антон купил на распродаже три книги – одну за полную цену, вторую с 20%-ной скидкой, а третью – с 50%-ной скидкой. В итоге все три книги для него обошлись одинаково. На следующий день Григорий купил такие же книги без скидки. На сколько процентов Гиигорий заплатил больше, чем Антон?

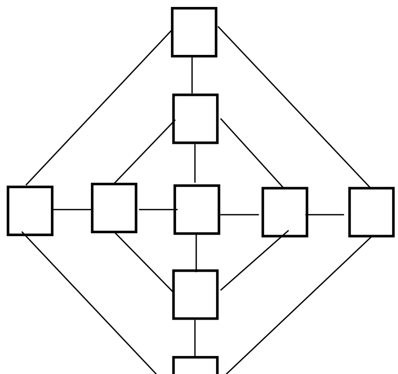
Ответ: $41\frac{2}{3}$*%. Решение*. Пусть стоимость первой книги равна *a*, второй – *b*, третьей – *c*. Тогда 0,8*b* = *a*, *b* = 1,25*a*. Кроме того, 0,5*c* = *a*, *c*=2*a*. Если Антон заплатил в итоге 3*a*, то Григорию пришлось платить 4,25*a*, значит, сумма Григория составляет 141 2/3 % от суммы Антона.

***Задача* 3**. Какое наименьшее количество клеток надо закрасить в квадрате 7×7 так, чтобы в каждом квадрате 4×4 было ровно по 5 закрашенных клеток? Ответ обоснуйте.



Ответ: 9. Решение. Рассмотрим самый левый верхний квадрат 4×4 и самый правый нижний квадрат 4×4. У них ровно одна общая клетка. В каждом из них по 5 закрашенных клеток, и только одна из них может быть общая, поэтому клеток минимум 5+5–1 = 9. Пример на 9 клеток – см. рисунок. Очевидно, что каждый квадрат 4×4 задевает среднюю полосу, итого в нем уже 4 клетки. Если его левый край прилегает к левому краю большого квадрата, то он содержит левую закрашенную клетку, иначе он содержит правую закрашенную клетку.

***Задача* 4**. Можно ли расставить 9 последовательных натуральных чисел в квадратики так, чтобы каждое встречалось ровно один раз, и были равны четыре суммы – пяти квадратиков по вертикали, пяти квадратиков по горизонтали, четырех квадратиков в вершинах большого квадрата и четырех в вершинах малого?



Ответ: нет. Решение. Обозначим девять последовательных чисел как *n*–4, *n*–3, *n*–2, *n*–1, *n*, *n*+1, *n*+2, *n*+3, *n*+4, их общая сумма равна 9*n*. Равные суммы обозначим через *S*. Сложим теперь два квадрата и две линии. Каждое число попадает либо в один квадрат и одну линию, либо в две линии (это среднее число), то есть ровно в две суммы. Получим, что 18*n* = 4*S*, откуда 9*n* = 2*S*. Теперь сложим только горизонталь и вертикаль. Тогда каждое число, кроме среднего, попадет в эту сумму ровно один раз, а среднее – два раза. Обозначим среднее число через *a*. Тогда 9*n*+*a* =2*S*, значит, *a*=0, что невозможно, так как все числа – натуральные.

***Задача* 5**. В классе учится 30 учеников, один из них — Вася. Каждый из Васиных одноклассников имеет ровно 5 общих друзей с Васей. Докажите, что в классе есть ученик с нечетным числом друзей.

Решение 1. Обозначим Васиных друзей как белые вершины, а остальных (кроме Васи и его друзей) – черными вершинами. В сумме их 29. Если белых вершин – нечетное количество, то искомый ученик – сам Вася. Пусть их четное количество. Тогда количество черных нечетно. Заметим, что степень каждой черной вершины в этом двудольном графе равна 5, поэтому ребер – нечетное число. Значит, есть белая нечетная вершина. То есть от этой белой идет к черным нечетное количество ребер. Кроме того, еще одно ребро идет к Васе. И к белым ведет еще пять ребер, а значит, общее количество ребер все равно нечетно.

Решение 2. Пусть у всех детей в классе четное количество друзей. Рассмотрим всех не-друзей Васи (черные вершины). Из каждой такой вершины ведет по 5 ребер к белым вершинам, а так как каждая вершина четная, то к черным вершинам ведет нечетное число ребер. Следовательно, в черном подграфе все степени нечетные, поэтому там четное число вершин. Тогда белых вершин – нечетное количество (так как белых+черных вершин в сумме 29). Но это значит, что у Васи нечетное количество друзей, и он – искомый ученик.