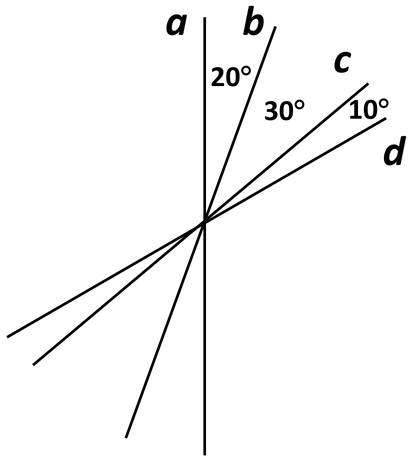
Ижевский клуб интеллектуальных игр «Что? Где? Когда?»
Центр довузовского образования ФГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет»

Городская математическая олимпиада им. Е.Н. Анисимовой.

Решения и критерии отборочного тура, 7 класс

Задача 1. Как провести через одну точку четыре прямые, чтобы среди углов между ними были углы величиной 10°, 20°, 30°, 40°, 50° и 60°? На чертеже укажите величины углов.



Решение. см. рис. Крайние прямые – *a* и *d*, отстоят на 60°. Между *c* и *d* – 10°, между *a* и *c* – 50°. Между *a* и *b* – 20°, значит, между *b* и *d* – 60°. Угол между *b* и *c* составляет 60°–10°–20° = 30°.

<u>Критерии.</u> За правильный рисунок с обозначенными углами ставиться <u>7 баллов</u>. Для полного балла все углы должны быть указаны на рисунке или описано, как их получить.

Задача 2. В записи натурального числа нет девяток. Ваня взял несколько последних цифр этого числа, увеличил их на 1, и сложил получившееся число с изначальным. Могло ли в сумме получится число из одних четверок? Если да – приведите пример, если нет – докажите невозможность.

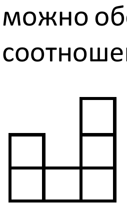
Ответ: нет, не могло. Решение. Посмотрим на последнюю цифру. Ваня точно её взял и увеличил на 1, значит, она поменяла четность. При сложении двух цифр разной четности можно получить только нечетную цифру, поэтому 4 получить нельзя.

<u>Критерии.</u> Ответ без обоснования – <u>0 баллов</u>. Ответ с примерами «когда не выходит» – <u>0 баллов</u>. Упоминание четности без должного обоснования (например, «не получится из-за четности» или «можно получить только нечетные числа») – <u>5 баллов.</u>

Задача 3. В поход одноклассники взяли шоколадки. Каждая девочка взяла по 18 штук «Твиксов», а каждый мальчик – 11 штук «Баунти». После того, как школьники все доели, оказалось, что каждая девочка съела по 7 шоколадок, а каждый мальчик – 21. Кого в поход пошло больше – девочек или мальчиков? Ответ обоснуйте.

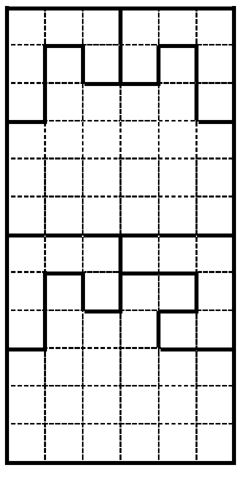
Ответ: мальчиков больше. Решение. Будем считать, что каждый ел свои шоколадки. Тогда каждая девочка отдала 11 шоколадок, а мальчик взял 10 чужих. Значит, девочек меньше, при этом соотношение мальчиков к девочкам составляет 11:10.

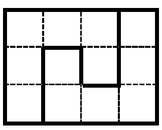
<u>Критерии.</u> Ответ без обоснования – <u>0 баллов</u>. При обосновании не обязательно упоминать соотношение. Возможно обоснование через уравнение. Если уравнение составлено верно, но вывод неверен (например, получено соотношение 11*d*= 10m, вывод – девочек больше) <u>– 4 балла</u>.



Задача 4. Из фигурок на рис. составили квадрат (фигурки кладут по линиям сетки). Каков минимальный возможный размер квадрата? Приведите пример и докажите, что меньше не получится.

Ответ: 12×12. Решение. Площадь фигурки равна 6 клеткам, поэтому площадь квадрата делится на 6. Получаем, что сторона квадрата тоже делится на 6. Допустим, что можно получить сторону, равную 6 см. Фигурка имеет стороны в 1, 2 или 3 клетки. Если к верхнему краю квадрата примыкает сторона в 1 клетку, то для того, чтобы заполнить два столбца рядом, нужны столбцы в 1 и 2 клетки, значит, другая фигурка будет располагаться однозначно, и они вместе составят прямоугольник 3×4. Тогда оставшиеся две клетки на верхнем крае должны быть заняты стороной фигурки 2, но, как бы ни располагалась наша фигурка, среднюю клетку не заполнить.





Пусть к верхней стороне прилегают три части фигурок по 2 клетки. Тогда в третьей сверху строке будет три части по три клетки, что невозможно. Следовательно, верхняя стороны квадрата (как и любая другая) заполняется только частями длиной три. Тогда в левом углу фигурка стоит однозначно с точностью до поворота, а вторая фигурка может стоять двумя способами. В любом из этих способов очевидно, что остальное пространство фигурками не заполнить.

Для заполнения квадрата 12×12 надо сложить из двух фигурок прямоугольник 3×4, после чего из них составить квадрат (положить 3 квадрата горизонтально и 4 по вертикали).

Критерии. Пример квадрата 12×12 – 2 балла.

- Доказательство того, что полученный квадрат должен иметь сторону, кратную 6 – 1 балл.
- Доказательство того, что к стороне получившегося квадрата не может примыкать сторона фигурки в 1 клетку – 1 балл.
- Доказательство того, что к стороне квадрата не могут примыкать стороны фигурки длиной 2 – 2 балла.
- Доказательство того, что если к сторонам квадрата примыкают только стороны в 3 клетки, то квадрат 6×6 не сложить – 1 балл.
- Баллы за части задачи складываются.

Задача 5. В задании на контрольной надо было подсчитать сумму 1,11 + 1,22 + 1,33 + 1,44 + 1,55 + 1,66 + 1,77 + 1,88 + 1,99. Ваня думал, что в ответе обязательно должно быть целое число, поэтому он, не заметив часть запятых, получил целое число. Какое наименьшее число запятых мог не заметить Ваня? Ответ обоснуйте.

Ответ: девять запятых (все запятые). Решение. Умножим все на 100 и получим задачу в целых числах. Если Ваня не заметил запятую, то в новой задаче он умножил число на 100. В итоге получилось число, кратное 100. Теперь будем рассматривать не сами числа, а остатки при делении на 100. Следовательно, вопрос в том, какое наименьшее количество числе надо вычеркнуть из суммы 11+22+…+99 так, чтобы получилось число, кратное 100.

Заметим, что 11+22+…+99= 11·(1+2+…+9) = 495. Заметим, что все числа в сумме кратны 11, поэтому после вычеркивания останется число, кратное 11. Но оно будет кратно 100, значит, кратно 1100 и меньше 495. Это только 0, поэтому надо вычеркнуть все числа.

Критерии. Ответ без обоснования – 1 балл.

- Если при решении переборов перебраны не все случаи, то не больше 3 баллов. Если при решении числа разбиваются на пары, которые в сумме дают целое число десятых, (1,11+1, 99 и т.д.), то скорее всего, решение неверно, так как целое число десятых можно получать, комбинируя несколько чисел (будьте внимательны при проверке).
- Идея домножения на 100 и рассмотрения задачи в целых числах без дальнейших продвижений – 1 балл

Городская математическая олимпиада им. Е.Н. Анисимовой.

Решения и критерии отборочного тура, 8 класс

Задача 1. На турнире участники на обед ели суп и второе. Суп съели 130 человек, а второе – 150 человек. При этом только одна шестая часть участников съела оба блюда, но голодным не ушел никто. Сколько школьников участвовало в турнире? Ответ обоснуйте.

Ответ: 240. Решение. Пусть в турнире участвовало n школьников. Тогда получаем уравнение $130 + 150 - \frac{n}{6} = n$, $\frac{7n}{6} = 280$, откуда n = 240.

Критерии. Ответ без обоснования – 1 балл. Задачу можно решать по действиям. Если нарисованы круги Эйлера, вычислений нет, выписан ответ – 4 балла.

Задача 2. В записи натурального числа нет девяток. Ваня взял несколько последних цифр этого числа, увеличил их на 1, и сложил получившееся число с изначальным. Могла ли сумма быть равна 123456789? Если да – приведите пример, если нет – докажите невозможность.

Ответ: нет. Решение. Несколько цифр – это минимум две. Посмотрим на последнюю цифру изначального числа. Она не больше 8, значит, после увеличения она не больше 9, а после сложения в этом разряде не может получиться больше 17. В сумме последняя цифра равна 9, значит, переноса из разряда в разряд не было. Рассмотрим разряд десятков, пусть там стоит цифра a. Так как переноса не было, то $a+(a+1)$ должно заканчиваться на 8, но это невозможно, так как $a+(a+1) = 2a+1$ = число нечетное.

Критерии. Ответ без обоснования – 0 баллов.

- Ответ с примерами «когда не выходит» – 0 баллов.
- Доказательство того, что не было переноса из разряда единиц в разряд десятков – 2 балла.
- Упоминание четности без должного обоснования (например, «не получится из-за четности» или «можно получить только нечетные числа») – вычитается 2 балла.
- Если слово «несколько» воспринято школьником как «возможно, одно», и он привел правильный пример, когда возможно – 3 балла.

Задача 3. Пусть точка E – середина основания AD трапеции $ABCD$. Отрезки BD и CE пересекаются в точке F. Оказалось, что AF перпендикулярно BD. Докажите, что $BC = FC$.

Решение. Рассмотрим треугольник AFD. В нем $\angle AFD = 90°$, FE – медиана из вершины прямого угла, значит, $AE = DE = FE$. Отсюда получаем, что $\angle ADF = \angle EFD$. Но $\angle ADF = \angle FBC$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD. С другой стороны, $\angle EFD = \angle CFB$ как вертикальные. Тогда $\angle FBC = \angle CFB$, треугольник FBC равнобедренный, $BC = CF$.

Критерии. Доказано, что $AE = DE = FE$ – 3 балла.

Задача 4. Известно, что $\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} = 1$. Найдите все возможные значения выражения $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{1}{ab}$.

Ответ: 1. Решение. Приведем первое выражение к общем знаменателю и получим $\frac{a(a+1)+b(b+1)}{(a+1)(b+1)} = \frac{a^2+a+b^2+b}{(a+1)(b+1)}$. Домножаем на знаменатель и открываем скобки, получаем $a^2+a+b^2+b = ab+a+b+1$, откуда $a^2+b^2-1 = ab$. Теперь второе выражение приведем к общему знаменателю и получим $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{1}{ab} = \frac{a^2+b^2-1}{ab} = \frac{ab}{ab} = 1$.

Критерии. Никаких ограничений на переменные ставить не надо (они очевидны из существования выражений). Ответ без обоснований – 1 балл. Получение из первого выражения соотношения $a^2+b^2-1 = ab$ – 3 балла.

Задача 5. Учитель выписала на доску 10 чисел. Ваня выписал себе в тетрадь среднее арифметическое первых двух чисел на доске, потом – среднее арифметическое первых трех чисел на доске, потом – первых четырех и так до среднего арифметического всех чисел. Среди Ваниных чисел оказалось 6 одинаковых чисел. Докажите, что на доске есть хотя бы два равных числа.

Решение. Пусть на доске выписаны числа a_1, a_2, …a_{10}. Обозначим то число, которое повторяется среди Ваниных чисел 6 раз, через s, после чего рассмотрим набор $b_i = a_i - s$. Пусть $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k} = s$, тогда $a_1+a_2+…+a_k = ks$, тогда $b_1+b_2+…+b_k = a_1+a_2+…+a_k - ks = 0$. То есть среди девяти сумм b_1+b_2, $b_1+b_2+b_3$, …, $b_1+b_2+..+b_9$ шесть сумм равны нулю. Если две подряд идущие суммы равны нулю, то вычтем меньшую из большей и получим, что $b_i=0$, а значит, $a_i = s$, то есть каждые две подряд идущие равные нулю суммы означают, что $a_i = s$. Пусть среди девяти сумм, среди которых шесть равны нулю, ровно одна пара нулей идет подряд. Объединим их. Тогда среди 8 чисел есть пять нулей, и никакие два не идут подряд, такого быть не может. Получаем, что есть две пары идущих подряд нулей, значит, среди первоначальных чисел минимум два числа равны s, значит, равны между собой.

Критерии. Идея рассмотрения набора $b_i = a_i - s$ без дальнейших продвижений – 1 балл.

- При решении может быть рассмотрение нескольких пар подряд идущих одинаковых средних без идеи сдвига (эта идея вовсе не обязательна).
- При решении без доказательства сказано, что если среди девяти чисел, записанных в ряд, шесть равны, то есть две пары подряд идущих равных чисел – снимается 2 балла.