Ижевский клуб интеллектуальных игр «Что? Где? Когда?»
Центр довузовского образования ФГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет»

Городская математическая олимпиада им. Е.Н. Анисимовой

23 апреля 2017 г, заключительный тур

РЕШЕНИЯ 4 КЛАССА

***Задача* 1.** В компании среди любых троих детей есть Саша, а среди любых четверых –девочка. Может ли так оказаться, что в компании нет девочки по имени Александра?

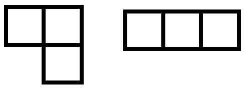
***Ответ: могло. Решение*.** Например, в компании из пяти человек будет три мальчика по имени Саша и две девочки Катя и Маша.

***Задача* 2.** Можно ли 2017 представить в виде суммы пяти слагаемых с одинаковой суммой цифр?

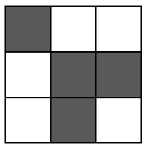
***Ответ: да. Решение*.** Вариантов много, например, 2000+11+2+2+2, 1019+290+119+380+209=2017 или 470+407+380+380+380=2017.

***Задача* 3.** На праздник пришли трое клоунов –Бим, Бом и Клепа. У одного были красные ботинки, у другого – желтые, а у третьего один ботинок был желтым, а второй – зеленым. Если бы у Бима ботинки были такими же, что и у Бома, то ботинок каждого цвета было бы поровну. Какого цвета ботинки у каждого из клоунов?

***Ответ: Бим – желтые, Бом – желтый и зеленый, Клепа – красный. Решение*.** Ботинок шесть, значит, стало бы по 2 ботинка каждого цвета. Если у Бома ботинки одного цвета, то ботинок этого цвета стало бы 4, противоречие. Значит, у Бома один ботинок желтый, а другой – зеленый. Но тогда у Бима станут такие же, и на Клепу остается красный цвет. А значит, у Бима желтые ботинки.



***Задача* 4.** Фигура из трех клеток – это либо прямоугольник 1×3, либо уголок из трех клеток. Какое наименьшее число клеток можно закрасить на белой доске 3×3 так, чтобы оттуда нельзя было по линиям сетки вырезать фигуру из трех клеток? Приведите пример и обоснуйте, что меньше клеток отметить нельзя.



***Ответ: четыре клетки. Решение*.** Пример, как отметить клетки, показан на рисунке.

Докажем, что тремя клетками и меньше не обойтись. Во-первых, в каждой строке или столбце должна быть хотя бы одна отмеченная клетка, но так как клеток три, то в каждом столбце отмеченная клетка – ровно одна. Значит, в каком-то столбце есть две неотмеченные клетки рядом (вертикальная доминошка 1×2). Рассмотрим соседнюю с ней вертикальную доминошку (она есть или слева, или справа). В ней должны быть отмечены обе клетки, но это невозможно, так как они в одном столбце.

***Задача* 5.** Учительница пришла в новый класс. Некоторые одноклассники дружат между собой, а некоторые – нет, но учительница не знает, кто с кем дружит. Учительница может вызвать к доске одного или нескольких ребят к доске и спросить, сколько у них друзей среди сидящих за партами. Если она вызывает сразу нескольких, то они называют ей, сколько друзей у них в сумме. Как учительнице за три вопроса узнать, дружат ли Антон и Борис?

***Решение*.** Сначала вызываем Андрея, потом Бориса. Они называют два числа. Потом вызываем их вместе, и если они не дружат, то их общее число равно сумме чисел Андрея и Бориса. Если же они дружат, то их суммарное число будет на 2 меньше суммы чисел Андрея и Бориса (так как у каждого из них один друг ушел к доске).

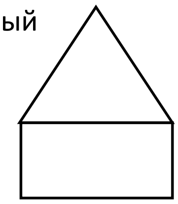
Ижевский клуб интеллектуальных игр «Что? Где? Когда?»
Центр довузовского образования ФГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет»

Городская математическая олимпиада им. Е.Н. Анисимовой

23 апреля 2017 г, заключительный тур

РЕШЕНИЯ 5 КЛАССА

***Задача* 1.** Изображенные на рисунке прямоугольник и равносторонний треугольник имеют равный периметр. Найдите стороны прямоугольника, если его площадь равна 50 см^2.



Ответ: 5 и 10 см. Решение. Так как периметры треугольника и прямоугольника равны, то две маленькие стороны прямоугольника составляют сторону треугольника, то есть отношение сторон прямоугольника равны 1:2. Если два таких прямоугольника совместить длинными сторонами, то получится квадрат площади 100 см^2, а значит, его сторона (равная длинной стороне прямоугольника) равна 10 см. Маленькая сторона в два раза меньше.

***Задача* 2.** Все натуральные числа от 1 до 30 выписали подряд слева направо: 123456789101112…282930. Сколько существует способов вычеркнуть все цифры полученного числа, кроме четырех, чтобы оставшиеся цифры образовали (без перестановок) число 2017?

Ответ: 22. Решение. Получить ноль можно только из 10 и 20.

Если ноль получен из 10, то двойка перед 10 только одна. А вот 7 можно получить из числа 17 или из числа 27. Если 7 получено из 17, то между 10 и 17 стоит восемь единиц (две в числе 11, и по одной – от 12 до 17), итого восемь способов. Если 7 получено из 27, то между 10 и 27 стоит 11 единиц (две в числе 11, по одной – от 12 до 19 и одна в числе 21). Уже 8+11 = 19 способов.

Если же ноль получен из 20, то двойку можно получить из числа 2, из числа 12 и из числа 20 – три способа. Зато 17 получается из чисел 21 и 27 единственным способом. Итого три способа, а всего -22.

***Задача* 3.** В каждой из трех семей муж на три года старше жены. Известно, что Иван на 3 года моложе Надежды, Федору и Марии вместе 56 лет, а Степану и Елене - 50 лет. Кто на ком женат?

Ответ: Федор-Надежда, Степан-Мария и Иван-Елена. Решение. Так как сумма лет мужа и жены делится на 3, то Федор и Мария, а также Степан и Елена не женаты. Пусть Федор женат на Елене, тогда Иван женат на Марии, а Степан – на Надежде. Тогда пусть возраст Марии равен m, тогда Ивану m+3, а Федору – 56–m. Но тогда Елене 53–m лет, возраст Степана m–3, следовательно, Надежде m–6 лет. Но тогда Надежда на 9 лет младше Ивана, противоречие. Значит, Федор женат на Надежде, Степан – на Марии и Иван – на Елене.

***Задача* 4.** Дома на улице занумерованы натуральными числами без пропусков, начиная с 10 (10, 11, 12, … и т.д.). Если сумма цифр номера дома делится на 5 или в номере есть цифра 5, то к нему привешивают табличку, а иначе – нет. Какое наибольшее число домов без таблички может стоять подряд?

Ответ: 8 подряд. Решение. Если нет перехода через десяток, то если подряд вдоль домов, то сумма цифр тоже возрастает на 1, значит, каждая пятая делится на 5. Значит, в одном десятке не может быть больше 4 домов. Переход через десяток может быть только одним. Пример на восемь – от 999996 до 1000003.

***Задача* 5.** Фигура "лягушка" поочерёдно делает ходы на 1, 2, 3, 1, 2, 3, … клетки (по горизонтали или вертикали). Какое наибольшее количество клеток лягушка может посетить на доске 8×8 (без учёта исходной клетки), если ей нельзя вставать на клетки, на которых она уже была?

Ответ: 48 клеток. Решение. Оценка. Раскрасим доску в шахматном порядке. Можно считать, что лягушка стоит на белой клетке. Тогда её путь будет таким: Б→Ч→Ч→Б→Ч→Ч→Б→…→Б. То есть, получается цикл из трёх клеток БЧЧ. Так как всего чёрных клеток 32, то лягушка пройдёт не более 16 белых клеток (не считая той, на которой она стоит). Следовательно, всего она пройдёт не более 48 клеток. Пример см. рис.

1	2	16	17		39	28	44
12		14	13	30		29	43
	3		18		38	37	45
11	10	15	25	26	40	27	
7	8	22	23	31	41		42
5	4	20	19	32		36	46
	9	49	24		48		47
6		21		33		35	34

Ижевский клуб интеллектуальных игр «Что? Где? Когда?»
Центр довузовского образования ФГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет»

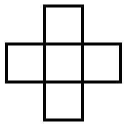
Городская математическая олимпиада им. Е.Н. Анисимовой

23 апреля 2017 г, заключительный тур

РЕШЕНИЯ 6 КЛАССА

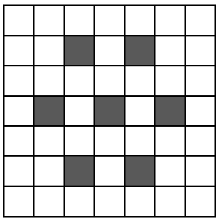
***Задача* 1.** Сколько существует четырехзначных чисел, у которых сумма первых трех цифр равна 3, а последних трех цифр – девяти?

Ответ: шесть. Решение. Заметим, что если определены первые три цифры, то последняя цифра будет определяться однозначно. Тройку можно представить как сумму 1+1+1 или 1+2+0 или 3+0+0. Во втором случае цифры могут быть переставлены четырьмя способами. Итого возможных вариантов шесть – 1117, 1027, 1207, 2108, 2018, 3009



***Задача* 2.** Крестиком назовем фигуру из пяти клеток (см. рисунок). Покажите, как отметить на доске 7×7 девять клеток так, что, какой бы крестик не был выбран, в него обязательно бы попала закрашенная клетка

Решение. Можно даже обойтись семью клетками (см. рис.)



***Задача* 3.** Назовем число хорошим, если оно после прибавления 17 делится на 20, а после прибавления 20 делится на 17. Найдите наименьшее хорошее число.

Ответ: 303. Решение. Хорошее число при прибавлении 17+20 = 37 делится сразу и на 17, и на 20. Наименьшее такое число – это НОК (17, 20) = 340. Вычитая из него 37, получим ответ.

***Задача* 4.** По кругу стоят 300 ящиков, вмещающих по два шара. Известно, что имеется по 200 шаров красного, синего и зелёного цвета. Шары разложили так, что в любых двух соседних ящиках нет шаров одного цвета. Какое наибольшее количество ящиков может содержать шары разных цветов?

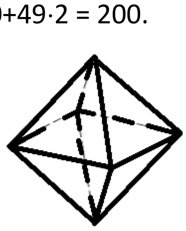
Ответ: 148. Решение. Всего шаров 600, а мест в ящиках тоже 600. Значит, в каждом ящике ровно по 2 шара.

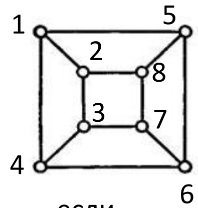
Обозначим цвета С, З, К. Если у нас есть ящик СЗ, то вокруг него обязательно КК. Назовем участок красным, если на нем встречаются только ящики СЗ и КК. Заметим, что начинается и заканчивается красный участок ящиками КК, а внутри него ящики СЗ не стоят рядом, то есть на красном участке ящиков КК минимум на один больше, чем СЗ. Аналогично на синем и зеленом участке (они определяются аналогично). Кроме того, участки каждого цвета обязательно есть, так как если у нас участок только одного цвета, то шаров этого цвета более чем в два раза больше остальных, а если двух цветов, например, К и З, то шаров синего цвета на красном участке не больше, чем зеленых, а на зеленом – строго меньше.

Следовательно, участков не меньше трех, и на каждом участке одноцветных ящиков минимум на 1 больше, чем разноцветных. Значит, разноцветных ящиков не более, чем (300–3):2 = 148,5, то есть не больше 148.

<u>Пример.</u> Сначала, чередуясь, идут 51 ящик КК и 50 ящиков СЗ, потом один ящик СС, затем на зеленом участке есть 51 ящиков ЗЗ и 50 ящиков СК, затем на синем участке 49 ящиков СС и 48 ящиков КЗ (КК СЗ КК СЗ…КК СС ЗЗ СК ЗЗ….СК ЗЗ СС КЗ… КЗ СС). Красных 51·2+50+48 = 200, зеленых 50+51·2+48 =200, синих 50+2+50+49·2 = 200.

***Задача* 5.** На столе лежит октаэдр (см. рис.). Игроки по очереди перекатывают его через ребро на другую грань. Через каждое ребро можно перекатить не более одного раза. Проиграл тот, кто не может сделать очередной ход. Кто из них сможет выиграть независимо от действий другого?





Ответ: Первый. Решение. Поставим в каждую грань точку, соединим точки, если грани имеют общее ребро. Получим граф, изображенный на рисунке. теперь игра состоит в перемещении по ребрам, причем по каждому можно пройтись не больше одного раза. В силу симметрии можно считать, что сначала мы стоим в вершине 1. Тогда первый ходит в 2, потом второй без ограничения общности – в 3. Первый ходит в 4. Далее если второй ходит в 1, первый ходит в 5 и оттуда получаем два вариант завершения 1-2-3-4-1-5-8-2 или 1-2-3-4-1-5-6-4, в обоих случаях выиграл первый. Пусть теперь второй выбрал начало 1-2-3-4-6. Тогда первый ходит в 5, и оттуда два варианта завершения 1-2-3-4-6-5-1-4 или 1-2-3-4-6-5-8-2, опять выиграл первый.